Cardinal de $DL(E)$

[ROMBALDI, p 148]

ÉNONCÉ : E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{F}_q^* = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}\}$.

Théorème : On a :

$$Card(DL(E)) = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_{q-1})\in\mathbb{N}^{q-1}\\ n_1+\dots+n_{q-1}=n}} \frac{Card(GL_n(\mathbb{F}_q))}{\prod_{i=1}^{q-1} Card(GL_{n_i}(\mathbb{F}_q))}$$

avec la convention $Card(GL_0(\mathbb{F}_q)) = 1$.

DÉVELOPPEMENT :

LEMME :

1. Soit $u \in GL(E)$. Alors $u^{q-1} = Id \iff u \in DL(E)$.
2. En notant
$$\mathcal{F}_{(n_1,\dots,n_{q-1})} = \left\{ (E_k)_{1\leq k\leq q-1} \mid E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} E_k,\ \dim(E_k) = n_k \right\},$$
on a :
$$Card(\mathcal{F}_{(n_1,\dots,n_{q-1})}) = Card(GL(E)) \times \left(\prod_{i=1}^{q-1} Card(GL(E_k)) \right)^{-1}$$

Démonstration. 1. Soit $u \in GL(E)$. Supposons que $u^{q-1} = Id$. Alors

$$P(X) = X^{q-1} - 1 = \prod_{\lambda\in\mathbb{F}_q^*} (X - \lambda)$$

est un polynôme annulateur de u scindé à racines simples, donc $u \in DL(E)$.
Réciproquement, si $u \in DL(E)$, son polynôme minimal π_u est scindé à racines simples, soit $\pi_u(X) = \prod_{\lambda\in Sp(u)}(X - \lambda)$. Or π_u divise $P(X)$, donc $u^{q-1} = Id$.

2. L'application $\begin{array}{rcl} \phi : DL(E) & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ u & \longmapsto & (Ker(u - \lambda_k Id))_{1\leq k\leq q-1} \end{array}$ est bijective. En effet, pour $u \in DL(E)$, P est un polynôme annulateur de u. En vertu du lemme des noyaux, on a donc $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} Ker(u - \lambda_K Id)$. De plus, pour $u, v \in DL(E)$, si $\phi(u) = \phi(v)$, alors pour tout $x \in E_{\lambda_k}$ et $k \in \{1, \dots, q-1\}$, on a $u(x) = v(x) = \lambda_k x$ donc $u = v$. Soit $(E_k)_{1\leq k\leq q-1} \in \mathcal{F}$. On pose, pour $k \in \{1, \dots, q-1\}$, l'application linéaire u définie par $u|_{E_k} = \lambda_k Id_{E_k}$. Alors $u \in DL(E)$ telle que $\phi(u) = (E_1, \dots, E_k)$.

3. Pour $(n_k)_{1\leq k\leq q-1} \in \mathbb{N}^{q-1}$ fixés tels que $\sum_{k=1}^{q-1} n_k = n$, l'action de groupe :
$$\begin{array}{rcl} GL(E) \times \mathcal{F}_{(n_1,\dots,n_{q-1})} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{(n_1,\dots,n_{q-1})} \\ (u, (E_1, \dots, E_{q-1})) & \longmapsto & (u(E_1), \dots, u(E_{q-1})) \end{array}$$
est transitive.
En effet, pour $u \in GL(E)$ et $E = \bigoplus_{k=1}^{q-1} E_k$ avec $\dim(E_k) = n_k$, $k \in \{1, \dots, q-1\}$, on a $E = u(E) = \bigoplus_{k=1}^{q-1} u(E_k)$ avec $\dim(u(E_k)) = n_k$ donc $(u(E_k))_{1\leq k\leq q-1} \in \mathcal{F}_{(n_1,\dots,n_{q-1})}$. Soit $(F_k)_{1\leq k\leq q-1} \in \mathcal{F}_{(n_1,\dots,n_{q-1})}$. Donnons-nous deux bases de E $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{q-1} \mathcal{B}_k$ et $\mathcal{B}' = \bigcup_{k=1}^{q-1} \mathcal{B}'_k$ où $\mathcal{B}_k$ et $\mathcal{B}'_k$ sont respectivement des bases de E_k et F_k, $k \in \{1, \dots, q-1\}$. Comme $\dim(E_k) =$

$\dim(F_k) = n_k$, on peut définir $u \in GL(E)$ par $u(\mathcal{B}_k) = \mathcal{B}'_k$, $k \in \{1, \dots, q-1\}$ et $u(E_k) = F_k$ pour $k \in \{1, \dots, q-1\}$.

4. De plus, en notant $Stab(E_1, \dots, E_k) = \{u \in GL(E) \mid u(E_k) = E_k,\ 1 \leq k \leq q-1\}$, on a $Stab(E_1, \dots, E_k) = \{u \in GL(E) \mid u|_{E_k} \in GL(E_k),\ 1 \leq k \leq q-1\}$. Par conséquent, on a :

$$Card(Stab(E_1, \dots, E_k)) = \prod_{k=1}^{q-1} Card(GL(E_k))$$

Mais comme comme l'action est transitive, il n'y a qu'une seule orbite. Par l'équation aux classes, on obtient le résultat.

□

Démonstration. (*théorème*) : En remarquant que les $\mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_{q-1})}$ forment une partition de $\mathcal{F}$, on aboutit à :

$$Card(DL(E)) = Card(\mathcal{F}) = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_{q-1}) \in \mathbb{N}^{q-1} \\ n_1 + \dots + n_{q-1} = n}} Card(\mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_{q-1})})$$

Le lemme permet d'obtenir l'égalité souhaité. □

Remarques :

- La factorisation $X^{q-1} - 1 = \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q^*} (X - \lambda)$ vient du fait que $\lambda^{q-1} = 1$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$ par le théorème de LAGRANGE, d'où la connaissance des $q-1$ racines de $X^{q-1} - 1$ et donc la factorisation souhaitée.
- On peut en déduire, avec un peu de travail, que $Card(DL(E)) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{q^{n^2}}{n!}$